BTS aéro	

Chap :
Dynamique des fluides incompressibles

1. DEFINITIONS

*Le **débit** est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.*

1.1. Débit-masse

Si Δm est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt, par définition le débit-masse est :

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$ unité : $kg \cdot s^{-1}$

1.2. Débit-volume

Si ΔV est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt, par définition le débit-volume est :

$$q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$ unité : $m^3.s^{-1}$

1.3. Relation entre q_m et q_V

La masse volumique ρ est donnée par la relation : $\rho = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

d'où : $q_m = \rho q_V$

Remarques **:**

Les liquides sont incompressibles et peu dilatables (masse volumique constante) ; on parle alors d'**écoulements isovolumes**.

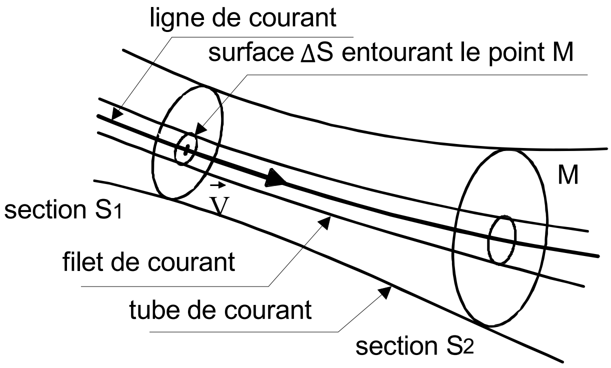
Pour les **gaz**, la masse volumique dépend de la température et de la pression. Pour des vitesses faibles (variation de pression limitée) et pour des températures constantes on retrouve le cas d'un écoulement isovolume.

1.4. Écoulements permanents ou stationnaires

Un régime d'écoulement est dit ***permanent*** ou ***stationnaire*** si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ...), ont une valeur constante au cours du temps.

2. Équation de conservation de la masse ou équation de continuité

2.1. Définitions



Ligne de courant : En régime stationnaire, on appelle ligne de courant la courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide. Une ligne de courant est tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse du fluide en ce point.

Tube de courant : Ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.

Filet de courant : Tube de courant s'appuyant sur un petit élément de surface ΔS.

La section de base ΔS du tube ainsi définie est suffisamment petite pour que la vitesse du fluide soit la même en tous ses points (répartition uniforme).

2.2. Conservation du débit

Considérons un tube de courant entre deux sections S_1 et S_2. Pendant l'intervalle de temps Δt, infiniment petit, la masse Δm_1 de fluide ayant traversé la section S_1 est la même que la masse Δm_2 ayant traversé la section S_2.

$$q_{m1} = q_{m2}$$

En régime stationnaire, le débit-masse est le même à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant.

Dans le cas d'un **écoulement isovolume** (ρ = Cte) :

$$q_{v1} = q_{v2}$$

En régime stationnaire, le débit-volume est le même à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant

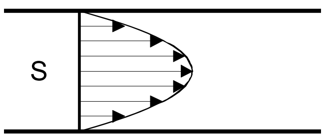
2.3. Expression du débit en fonction de la vitesse v

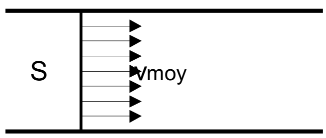
Le débit-volume est aussi la quantité de liquide occupant un volume cylindrique de base S et de longueur égale à v, correspondant à la longueur du trajet effectué pendant l'unité de temps, par une particule de fluide traversant S.

Il en résulte la relation importante : $q_v = v\,S$

2.4. Vitesse moyenne

En général la vitesse v n'est pas constante sur la section S d'un tube de courant ; on dit qu'il existe un **profil de vitesse** (à cause des forces de frottement). Le débit-masse ou le débit-volume s'obtient en intégrant la relation précédente :





Dans une section droite S de la canalisation, on appelle **vitesse moyenne v_m** la vitesse telle que :

$$\boxed{V_{moy} = \frac{q_V}{S}}$$

La vitesse moyenne v_{moy} apparaît comme la vitesse uniforme à travers la section S qui assurerait le même débit que la répartition réelle des vitesses.

Si l'écoulement est isovolume, cette vitesse moyenne est inversement proportionnelle à l'aire de la section droite.

$$\boxed{q_V = v_{1moy} S_1 = v_{2moy} S_2 = Cte}$$

C'est **l'équation de continuité**.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

La vitesse moyenne est d'autant plus grande que la section est faible.

3. Théorème de BERNOULLI

3.1. Le phénomène

Observations

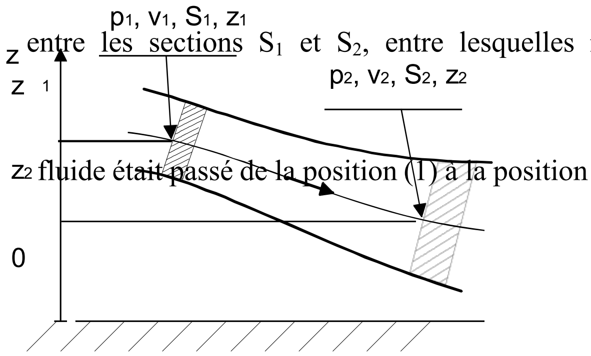
- Une balle de ping-pong peut rester en suspension dans un jet d'air incliné.
- Une feuille de papier est aspirée lorsqu'on souffle dessus.

Conclusion : La pression d'un fluide diminue lorsque sa vitesse augmente.

3.2. Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible

Un *fluide parfait* est un fluide dont l'écoulement se fait *sans frottement*.

On considère un écoulement permanent isovolume d'un fluide parfait, entre les sections S_1 et S_2, entre lesquelles :



Soit m la masse et V le volume du fluide qui passe à travers la section S_1 entre les instants t et t+Δt. Pendant ce temps la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section S_2. Tout se passe comme si ce fluide était passé de la position (1) à la position

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants t et t+Δt (la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), on obtient :

$$\boxed{\rho\frac{V^2}{2} + \rho g z + p = Cte}$$

p est la pression statique, ρgz est la pression de pesanteur, $\rho\frac{V^2}{2}$ est la pression cinétique.

Tous les termes s'expriment en pascal.

En divisant tous les termes de la relation précédente par le produit ρg, on écrit tous les termes dans la dimension d'une hauteur (pressions exprimées en mètres de colonne de fluide).

$$\frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \mathrm{H} = Cte$$

H est la Hauteur totale, $\frac{p}{\rho g}$ est la Hauteur de Pression, z est la cote, $\frac{V^2}{2g}$ est la Hauteur cinétique, $z + \frac{p}{\rho g}$ est la Hauteur piézomètrique.

3.3. Cas d'un écoulement (1)→(2) sans échange de travail

Lorsque, dans un écoulement d'un fluide parfait, il n'y a aucune machine (ni pompe ni turbine) entre les points **(1)** et **(2)** d'une même ligne de courant, la relation de Bernoulli peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = 0$$

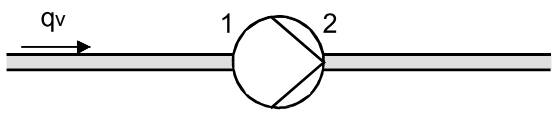
Ou

$$\frac{1}{2g}(V_2^2 - V_1^2) + (z_2 - z_1) + \frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} = 0$$

3.4. Cas d'un écoulement (1)→(2) avec échange d'énergie

Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique, il échange de l'énergie avec cette machine sous forme de travail ΔW pendant une durée Δt. La puissance P échangée est $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

Unités : P en watt (W), W en joule (J), t en seconde (s).



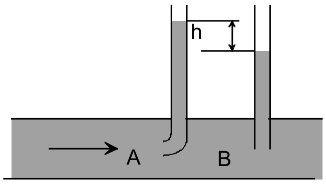
- P > 0 si l'énergie est reçue par le fluide (ex. : pompe) ;
- P< 0 si l'énergie est fournie par le fluide (ex. : turbine).

Si le débit-volume est q_v, la relation de Bernoulli s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = 0$$

4. Application du Théorème de Bernoulli :

4.1. Tube de pitot

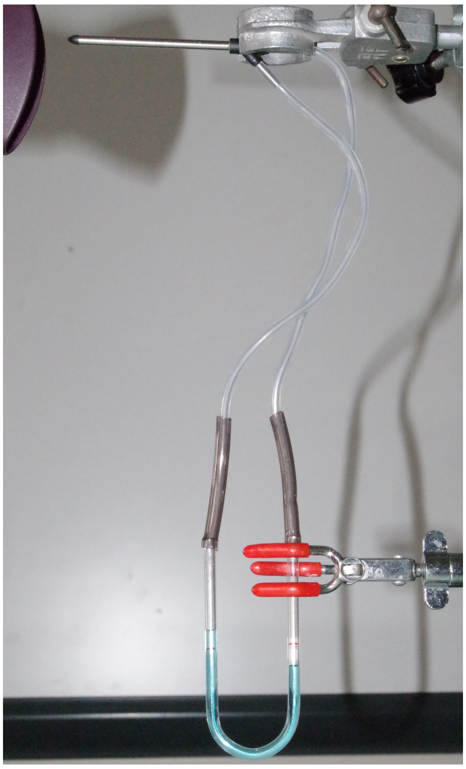


On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en A face au courant, et l'autre en B est le long des lignes de courant, les deux extrémités étant à la même hauteur. Au point B, le liquide a la même vitesse v que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide $p_B = p$.
En A, point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression est p_A.

D'après le théorème de Bernoulli, $P_B + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_A$

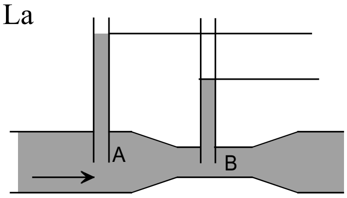
soit

$$\frac{1}{2}\rho V^2 = P_A - P_B = \rho g h$$



En mesurant la dénivellation h du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse v d'écoulement du fluide.

4.2. Phénomène de Venturi



Un conduit de section principale S_A subit un étranglement en B où sa section est S_B. La vitesse d'un fluide augmente dans l'étranglement, donc sa pression y diminue : $v_B > v_A \Rightarrow p_B < p_A$

Le théorème de Bernoulli s'écrit ici :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho {V_A}^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho {V_B}^2 = P_C + \frac{1}{2}\rho {V_C}^2$$

D'après l'équation de continuité, $v_B S_B = v_A S_A = q_v$ et $v_B > v_A$ donc $p_A > p_B$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right)q^2 = kq^2$$

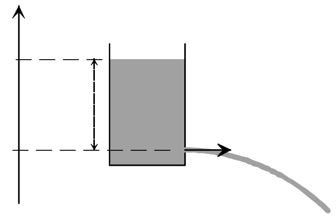
La différence de pression aux bornes aux extrémités du tube de Venturi est proportionnelle au carré du débit ; application à la mesure des débits (organes déprimogènes).

On peut citer aussi la trompe à eau, le pulvérisateur...

4.3. Écoulement d'un liquide contenu dans un réservoir - Théorème de Torricelli

Considérons un réservoir muni d'un petit orifice à sa base, de section s et une ligne de courant partant de la surface au point (1) et arrivant à l'orifice au point (2). En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2),

$$\rho\frac{V_1^2}{2} + \rho g z_1 + p_1 = \rho\frac{V_2^2}{2} + \rho g z_2 + p_{21}$$



Or $p_1 = p_2$ = pression atmosphérique.

Et $v_1 << v_2$ d'où

$$V_2 = \sqrt{2gz}$$

La vitesse d'écoulement est la même que la vitesse de chute libre entre la surface libre et l'orifice, quelle que soit la masse volumique du liquide.

Application : vase de Mariotte à débit constant.